

# ПОЛУЧЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА МНОГОИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ТРАСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

АХИЕЗЕР Е.Б., ГЕЛЯРОВСКАЯ О.А.,  
ДУНАЕВСКАЯ О.И., ПРОЦАЙ Н.Т.

Рассматривается методика построения начального опорного плана многоиндексной задачи транспортной логистики. Предлагается эффективный метод нуль-преобразования исходных матриц стоимостей для получения начального опорного плана. Описываются соответствующие вычислительные процедуры.

## 1. Введение

**Актуальность.** В реальных задачах транспортной логистики необходимо учитывать не только различия в пунктах производства и потребления, но и промежуточных центров, вида товара, типа транспортных средств. Такая задача описывается многоиндексной моделью транспортной задачи [1].

При высокой размерности задачи, характерной для всех многоиндексных задач, трудно формализуемыми становятся традиционные процедуры построения начального опорного плана, использующие стандартные методы (метод «северо – западного угла», метод минимальной стоимости, метод Фогеля) [2, 3].

Точное решение многоиндексной транспортной задачи может быть получено методом потенциалов [1, 4]. Однако практическая реализация этого метода является трудоемкой, так как содержит большое число итераций. Основная причина – начальный опорный план никак не связан с матрицей стоимостей и поэтому может быть произвольно далеким от оптимального. При этом вычислительная сложность решения быстро растет с увеличением размерности задачи.

**Цель:** построить начальный опорный план многоиндексной задачи транспортной логистики на основании метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Анализ традиционных методов построения начального опорного плана в транспортных задачах.
2. Разработка метода построения начального опорного плана для многоиндексной задачи. Получение соотношения для расчета элементов плана для задачи произвольной индексности.
3. Модификация метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей.
4. Анализ эффективности метода нуль – преобразований.

## 2. Метод построения начального опорного плана для многоиндексной задачи. Получение соотношения для расчета элементов плана для задачи произвольной индексности

Общая формулировка q-индексной транспортной задачи такова: найти набор  $X = (X_{j_1 j_2 \dots j_q})$ , минимизирующий целевую функцию

$$L(X) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_q=1}^{n_q} C_{j_1 j_2 \dots j_q} X_{j_1 j_2 \dots j_q} \quad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 \dots j_q} = b_{j_2 j_3 \dots j_q}, \quad j_k \in J_k, \quad k = \{2, 3, \dots, q\},$$

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} X_{j_1 j_2 \dots j_q} = b_{j_1 j_3 \dots j_q}, \quad j_k \in J_k, \quad k = \{1, 3, \dots, q\}, \quad (2)$$

$$\sum_{j_q=1}^{n_q} X_{j_1 j_2 \dots j_q} = b_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}}, \quad j_k \in J_k,$$

$$k = \{1, 2, \dots, q-1\}, \quad X_{j_1 j_2 \dots j_q} \geq 0, \quad j_1 \in J_1, \quad j_2 \in J_2, \dots, \quad j_q \in J_q, \quad (3)$$

$C_{j_1 j_2 \dots j_q}$  – матрица, определяющая стоимость транспортировки единицы груза в условиях  $(j_1, j_2, \dots, j_q)$ ;  $b_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}}$  – суммарный объем груза, транспортируемого в условиях  $(j_1, j_2, \dots, j_{q-1})$ .

Простая технология расчета элементов плана задачи основана на условиях существования решения, сформулированных применительно к триаксальной трехиндексной транспортной задаче.

Соотношения для расчета элементов плана задачи:

$$X_{j_1 j_2 j_3} = \frac{b_{j_1 j_2}}{n_3} + \frac{b_{j_1 j_3}}{n_2} + \frac{b_{j_2 j_3}}{n_1} - \frac{b_{j_3}}{n_1 n_2} - \frac{b_{j_2}}{n_1 n_3} - \frac{b_{j_1}}{n_2 n_3} + \frac{S}{n_1 n_2 n_3}, \quad (4)$$

где  $b_{j_1} = \sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2},$

$$b_{j_2} = \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3}, \quad b_{j_3} = \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}, \quad S = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3}.$$

Неотрицательный, удовлетворяющий условиям баланса набор, определяемый (4), есть план задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3} &= \frac{1}{n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2} + \frac{1}{n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3} + \\ &+ \frac{1}{n_1} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_2 j_3} - \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_3} - \frac{1}{n_1 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_2} - \\ &- \frac{1}{n_2 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} S. \end{aligned} \quad (5)$$

Учтем условия баланса, в соответствии с которыми

$$\begin{aligned}\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} &= \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3}, \quad j_1=1,2,\dots,n_1, \\ \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2} &= \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3}, \quad j_2=1,2,\dots,n_2, \\ \sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_2 j_3} &= \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}, \quad j_3=1,2,\dots,n_3, \\ \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3} = \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3} = S.\end{aligned}$$

Преобразуя (5), получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3} &= \frac{1}{n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2} + \frac{1}{n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3} + b_{j_2 j_3} - \\ &- \frac{1}{n_2} b_{j_3} - \frac{1}{n_3} b_{j_2} - \frac{1}{n_2 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1} + \frac{1}{n_2 n_3} S\end{aligned}\quad (6)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_2} b_{j_3} &= \frac{1}{n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}, \\ \frac{1}{n_3} b_{j_2} &= \frac{1}{n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_2 j_3} = \frac{1}{n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2}, \\ \frac{1}{n_2 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1} &= \frac{1}{n_2 n_3} \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} = \frac{1}{n_1 n_2} S,\end{aligned}\quad (7)$$

то (6) выражение с учетом (7) упростится к виду

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_2 j_3}, \quad j_2=1,2,\dots,n_2, \quad j_3=1,2,\dots,n_3. \quad (8)$$

Аналогично этому в результате суммирования (4) по  $j_2$ , а затем по  $j_3$ , получим соответственно

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_1 j_3}, \quad j_1=1,2,\dots,n_1, \quad j_3=1,2,\dots,n_3, \quad (9)$$

$$\sum_{j_3=1}^{n_3} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_1 j_2}, \quad j_1=1,2,\dots,n_1, \quad j_2=1,2,\dots,n_2. \quad (10)$$

Таким образом, из (8) – (10) следует, что набор (4) – план задачи. Соотношение (4) легко обобщается на случай произвольного числа индексов. В частности, при  $S=4$  соотношение для расчета компонентов плана имеет вид:

$$\begin{aligned}X_{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \frac{b_{j_2 j_3 j_4}}{n_1} + \frac{b_{j_1 j_3 j_4}}{n_2} + \frac{b_{j_1 j_2 j_4}}{n_3} + \frac{b_{j_1 j_2 j_3}}{n_4} - \\ &- \frac{b_{j_1 j_2}}{n_3 n_4} - \frac{b_{j_1 j_3}}{n_2 n_4} - \frac{b_{j_1 j_4}}{n_2 n_3} - \frac{b_{j_2 j_3}}{n_1 n_4} - \frac{b_{j_2 j_4}}{n_1 n_3} - \frac{b_{j_3 j_4}}{n_1 n_2} + \\ &+ \frac{b_{j_1}}{n_2 n_3 n_4} + \frac{b_{j_2}}{n_1 n_3 n_4} + \frac{b_{j_3}}{n_1 n_2 n_4} + \frac{b_{j_4}}{n_1 n_2 n_3} - \frac{S}{n_1 n_2 n_3 n_4}.\end{aligned}\quad (11)$$

### 3. Модификация метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей

Нуль-преобразование исходной матрицы стоимостей для обычной двухиндексной транспортной задачи имеет вид

$$C_{ij}^{(0)} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j), \quad (12)$$

$$\beta_j = \min_i \{C_{ij} - \alpha_i\}, \quad \alpha_i = \min_j \{C_{ij}\}.$$

Полезный эффект, возникающий при использовании этого преобразования, состоит в том, что

$$\min_i \{C_{ij}^{(0)}\} = 0, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$\min_j \{C_{ij}^{(0)}\} = 0, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Таким образом, в каждой строке и каждом столбце матрицы стоимостей  $\{C_{ij}^{(0)}\}$  появляется по меньшей мере один нулевой элемент. Это приводит к тому, что начальный опорный план ближе к оптимальному, а следовательно, для решения задачи понадобится значительно меньшее число итераций.

Обобщим соотношения (12) на случай транспортной задачи произвольной индексности. При этом нуль-преобразование исходной матрицы стоимостей имеет вид

$$C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{(0)} = C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \left( \alpha_{j_1 j_2 \dots j_s}^{(1)} + \alpha_{j_1 j_3 \dots j_s}^{(2)} + \dots + \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}^{(s)} \right),$$

где

$$\alpha_{j_2 j_3 \dots j_s}^{(1)} = \min_{j_1} \{C_{j_1 j_2 \dots j_s}\}, \quad \alpha_{j_1 j_3 \dots j_s}^{(2)} = \min_{j_2} \{C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \alpha_{j_2 j_3 \dots j_s}^{(1)}\}$$

$$\alpha_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}^{(s)} = \min_{j_s} \{C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \alpha_{j_2 j_3 \dots j_s}^{(1)} - \dots - \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{s-2} j_s}^{(s-1)}\}.$$

### 4. Выводы

Эффективность метода нуль-преобразований исследована экспериментально при решении двухиндексных и трехиндексных транспортных задач (рис. 1 и 2). Условия задач формировались с помощью имитационной модели. Каждая задача решалась дважды: а) начальный план формируется традиционным методом северо-западного угла; б) начальный план формируется методом нуль – преобразований. Критерий оценки эффективности имеет вид

$$\eta_k(N) = \frac{V_k^{(T)}(N)}{V_k^{(0)}(N)}, \quad k=2,3.$$

Здесь  $V_k^{(T)}(N)$  – количество итераций улучшения начального плана, полученного традиционным методом до получения решения;  $V_k^{(0)}(N)$  – количество итераций улучшения начального плана, полученного

методом нуль – преобразований до получения решения;  $N$  – размерность задачи.

$$\eta_2 = 1.5 \times 10^{-3} N^{1.5};$$

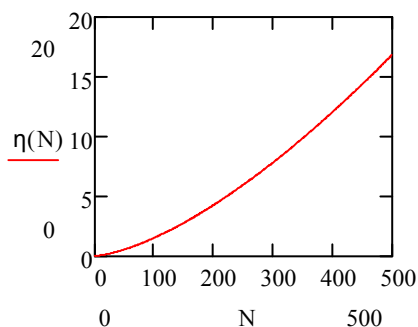


Рис. 1. График зависимости оценки эффективности метода нуль – преобразований от размерности двухиндексной задачи

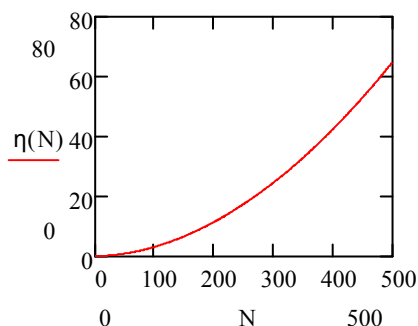


Рис. 2. График зависимости оценки эффективности метода нуль – преобразований от размерности трехиндексной задачи

**Научная и практическая значимость.** Таким образом, использование условий существования решения для многоиндексных задач транспортной логистики позволяет получить начальный опорный план путем расчета по формулам, не прибегая к стандартным трудоемким алгоритмическим процедурам. Для решения многоиндексной задачи управления транспортировками предложен эффективный метод нуль-преобразований матриц для получения начального опорного плана, что существенно ускоряет процедуру решения.

Методика построения начального опорного плана многоиндексной задачи транспортной логистики была

разработана для линейных транспортных задач. В дальнейшем планируется усовершенствовать алгоритм для использования его при решении нелинейных транспортных задач, которые возникают в результате, во-первых, учета более адекватных, чем линейные, зависимостей стоимости транспортировки от объема перевозимого груза, и, во-вторых – в результате построения моделей транспортных задач, параметры которых носят стохастический характер.

**Литература:** 1. Раскин Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. М., 1982. 240с. 2. Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. М.: Сов. радио, 1969. 382с. 3. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач / К.Н. Лунгу. М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. 128с. 4. Лукинский В.С. Модели и методы теории логистики / В.С. Лукинский, И.А. Цвиринько, Ю.В. Малевич. СПб.: ПИТЕР, 2003. 175с.

Поступила в редколлегию 27.05.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Пиротти Е.Л.

**Ахмезер Елена Борисовна**, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

**Гелярковская Оксана Анатольевна**, доцент кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

**Дунаевская Ольга Игоревна**, канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

**Процай Наталья Тимофеевна**, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.